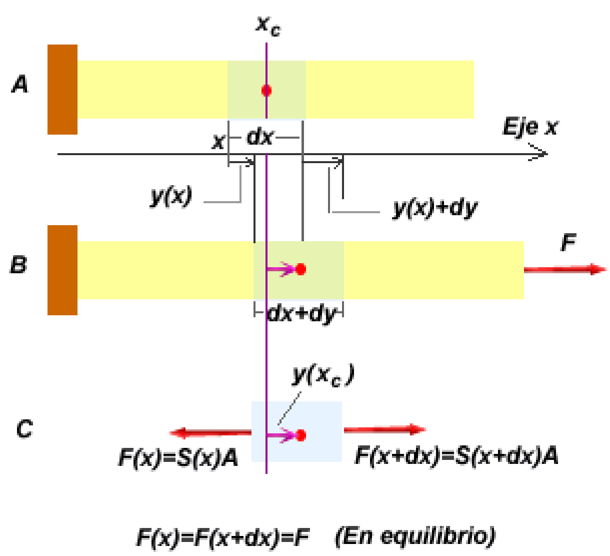
Ondas en Barras

Ondas longitudinales en barras

Se ejerce una fuerza longitudinal de magnitud F sobre una barra que está empotrada en una pared (como se indica en la figura) . En la parte de arriba de la figura, la barra no ha sido deformada. En la parte de abajo se ilustra la deformación de un elemento dx de la barra, el cual estará sometido a dos fuerzas ejercidas por las porciones de la barra que se encuentran a su lado y que en situación de equilibrio serán iguales en magnitud a F . La fuerza deformadora se propaga, sin disminuir su magnitud, a todos los puntos de la barra.



En este elemento dx la cara cuya posición de equilibrio está ubicada en x , se elonga longitudinalmente en una cantidad igual a y , y la cara cuya posición de equilibrio está ubicada en $x+dx$ se elonga en una cantidad igual a $y+dy$. La deformación en dirección longitudinal (deformación longitudinal) de la porción de barra dx es igual a dy . La ley de Hooke para pequeñas deformaciones longitudinales en barras sólidas (por ejemplo, en una barra de acero usada en construcción, podría ser del orden de 1 mm en 1 m) establece que estas son proporcionales a los esfuerzos causantes de las mismas,

$$S = Y\frac{dy}{dx}$$

siendo S el esfuerzo longitudinal responsable de la deformación longitudinal dy del elemento de barra dx. De acuerdo a la ley de Hooke generalizada, el módulo de elasticidad de la barra es Y y se le conoce con el nombre de módulo de Young del material (se mide en pascales, Pa),

$$\beta = Y$$

Cuando ondas longitudinales se propagan a través de una barra, el centro de masa de cada elemento dx de la misma estará acelerado longitudinalmente debido a que las fuerzas aplicadas longitudinalmente que actúan a ambos lados del elemento (ejercidas por las porciones de la barra que están contiguas) ya no son iguales sino opuestas y de magnitud diferente.

Aplicando la segunda ley de Newton al elemento dx (Figura 3 C), y sabiendo que la aceleración de vibración de su centro de masa es $a_{cm} = \left.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right|_{x_c}$, se obtiene,

$$F(x+dx) - F(x) = dm\left.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right|_{x_c}$$

Aplicando la ley de Hooke,

$$(YA)\left\{\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right\} = \rho A dx\left.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right|_{x_c}$$

se obtiene,

$$\frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

donde las derivadas son evaluadas en x (el *centro de masa* se acerca al extremo izquierdo del elemento tanto como queramos). Por lo tanto la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en barras según la ecuación diferencial de onda generalizada es igual a,

$$V = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

siendo ρ la densidad volumétrica del material

Se debe anotar que con esta expresión se calcula la velocidad de propagación de una **onda longitudinal en barras sólidas**, ya que su parte lateral se expande y comprime levemente cuando la ondas se propagan a través de ellas. En caso de que la onda se esté propagando en un medio sólido "ilimitado" de materia, donde el material contiguo no permite esos abombamientos y encogimientos, el modo de calcular la velocidad de propagación es diferente (se trata de métrica de ondas longitudinales en materiales). Por ejemplo, la velocidad de la onda longitudinal en una barra de plomo es del orden de 1200 m/s, mientras que en un medio "ilimitado " de plomo es del orden de 1960 m/s.

Importante señalar que cuando la frecuencia de una **onda longitudinal** está dentro del rango auditivo (16 hz a 20000 hz), se le denomina **sonido**.

En la siguiente simulación se golpea por la izquierda una barra con un martillo generándose ondas viajeras en ella. Se observa como oscilan las secciones del medio; en particular se puede ver como un elemento del medio sufre permanentemente deformaciones (compresiones y expansiones).

Onda de Fuerza propagándose longitudinalmente a través de la barra

Simultáneamente con la onda de elongación, $V^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, se propagan una onda de fuerza, ambas a la misma velocidad. Esto se muestra a continuación.

El elemento de barra dx vibra con aceleración debido a que la suma de las fuerzas que actuán sobre ambas caras de él están en sentidos opuestos y no se anulan, es decir, $dF \neq 0$. Por tanto aplicando la segunda ley de Newton al elemento se obtiene,

$$dF = \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Además de la ley de Hooke se sabe que,

$$F = YA\frac{\partial y}{\partial x}$$

tomando la segunda derivada temporal en esta última ecuación,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = YA\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right),$$

sabiendo que $\frac{\partial F}{\partial x} = \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, se puede concluir que,

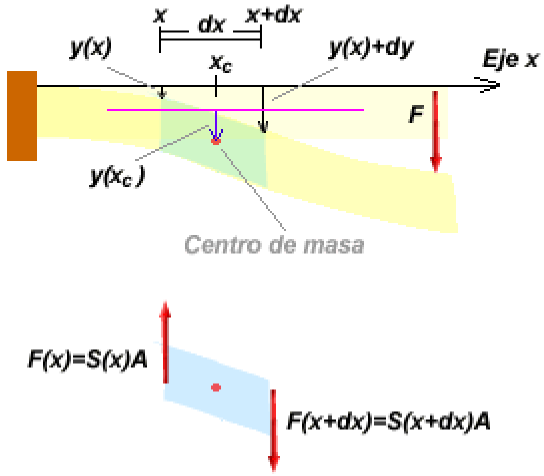
$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = YA\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho A}\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

que corresponde a la ecuación de onda. Es decir, la magnitud física Fuerza también se propaga a través de la barra como una onda y a la misma velocidad $V = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ que la onda de elongación y

Ondas Transversales en una Barra

Se ejerce una fuerza transversal (fuerza de cizalladura) de magnitud F sobre una barra que está empotrada en la pared (figura 2). En la figura se ilustra la deformación de un elemento dx de la barra, el cual estará sometido a dos fuerzas ejercidas por las porciones de la barra que se encuentran a su lado.



En este elemento dx la cara cuya posición de equilibrio está ubicada en x, se elonga transversalmente en una cantidad igual a y, y la cara cuya posición de equilibrio está ubicada en $x+dx$ se elonga en una cantidad igual a $y+dy$. La deformación en dirección transversal (deformación transversal) de la porción de barra dx es igual a dy. La ley de Hooke para pequeñas deformaciones transversales en barras sólidas establece que estas son proporcionales a los esfuerzos causantes de las mismas,

$$S = G\frac{dy}{dx}$$

siendo S el esfuerzo transversal responsable de la deformación transversal dy del elemento de barra dx. De acuerdo a la ley de Hooke generalizada, el módulo de elasticidad de la barra es G y se le conoce con el nombre de *módulo de rigidez* del material (se mide en pascales, Pa),

$$\beta = G$$

Cuando ondas transversales se propagan a través de una barra, el centro de masa de cada elemento dx de la misma estará acelerado transversalmente debido a que las fuerzas aplicadas transversalmente y que actúan a ambos lados del mismo (ejercidas por las porciones de la barra que están contiguas) ya no son iguales sino opuestas y de magnitud diferente.

Aplicando la segunda ley de Newton al elemento dx (Figura 2), y sabiendo que la aceleración de vibración de su centro de masa es $a_{cm} = \left.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right|_{x_c}$, se obtiene,

$$F(x+dx) - F(x) = dm \left.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right|_{x_c}$$

Aplicando la ley de Hooke,

$$(GA)\left\{\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right\} = \rho A dx \left.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right|_{x_c}$$

se obtiene,

$$\frac{G}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

donde las derivadas son evaluadas en x (el *centro de masa* se acerca al extremo izquierdo del elemento tanto como queramos). Por lo tanto la velocidad de propagación de las ondas transversales en barras según la ecuación diferencial de onda generalizada es igual a,

$$V = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

siendo ρ la densidad volumétrica del material

Como dato, la velocidad de propagación de las ondas transversales en una barra de acero es del orden de 3200 m/s, mientras que las longitudinales en la misma se propagan con una velocidad aproximada de 5100 m/s.